Chapitre 5 : Théorèmes généraux de la mécanique des fluides

5.1 Introduction

Nous avons vu au chapitre précédent le système d'équations qui décrit le comportement dynamique (équations de Navier-Stockes) et thermique (équation de la chaleur) d'un milieu fluide newtonien. L'intégration du système de Navier-Stockes nous fournit une description totale de la dynamique de l'écoulement en termes des champs eulériens locaux de pression et de vitesse.

D'un autre côté, nous avons mis l'accent sur un aspect fondamental de ces équations qui est la non-linéarité. En effet, bien que le système de Navier-Stockes soit mathématiquement fermé, la non-linéarité introduite par les termes de convection rend la résolution analytique dans le cas général, même approchée, quasiment impossible. Nous avons vu également que la résolution n'est possible que dans un nombre très réduit de cas qui obéissent à des hypothèses simplificatrices qui permettent justement de linéariser ces équations (Ex : écoulement de Poiseuille ou écoulement de couette).

Dans le cas général, la résolution numérique reste une issue très intéressante qui a donné lieu à une discipline intitulée « Mécanique des Fluides Numérique ». Grâce au grand progrès des moyens de calcul numérique, cette discipline a permis de développer des codes numériques de CFD (Computational Fluid Dynamics) qui se basent sur cette résolution numérique. Ces codes constituent actuellement un outil d'ingénierie fondamental pour la simulation et l'investigation des systèmes fluides dans les divers domaines d'application.

D'autre part, dans un grand nombre d'applications pratiques on n'a pas besoin de connaître un écoulement jusqu'à ces échelles caractéristiques microscopiques. Mais plutôt ses conséquences, telles que le débit ou l'effort exercé sur une structure solide. En termes d'échelles, ces résultats peuvent être interprétés comme des grandeurs globales à une échelle macroscopique résultant d'une intégration sur une surface ou sur un volume des quantités locales. C'est pourquoi il serait extrêmement utile de disposer de relations ayant un aspect pratique permettant d'établir ces grandeurs globales.

Dans ce chapitre nous nous proposons de revenir sur ces relations qu'on a l'habitude de regrouper sous le vocable de *théorèmes généraux de la mécanique des fluides.* Ils concernent le *théorème d'Euler* et le *théorème de Bernoulli* qui se déduisent respectivement des principes de conservation de quantité de mouvement et de l'énergie (voir chapitre 3). Nous préciserons notamment les hypothèses de leur application en pratique qu'il faut respecter et qu'il faut traiter avec prudence. En effet, l'absence de ces hypothèses (comme par exemple l'hypothèse d'un fluide parfait) peut mener dans certains à des résultats très loin de la réalité.

5.2 Conservation de quantité de mouvement: Théorème d'Euler

5.2.1 Forme générale

On considère l'écoulement permanent d'un fluide réel. L'équation globale de conservation de quantité de mouvement sur un volume de contrôle D_C établie au chapitre 3 (voir équation (3-13) au chapitre 3) s'écrit :

$$\int_{\Sigma_C} \rho \mathbf{v}(\mathbf{v}\cdot\mathbf{n})\,ds = F_{ext} = \int_{D_C} \rho \mathbf{g} d\tau - \int_{\Sigma_C} p\mathbf{n}ds + \int_{\Sigma_C} \boldsymbol{\tau}\cdot\mathbf{n}ds \tag{5-1}$$

Cette relation constitue la forme générale du théorème d'Euler qui permet de déduire, à partir de la connaissance du champ de vitesse **v** sur la paroi Σ_C et de la masse volumique ρ, les efforts auxquels est soumis le milieu fluide contenu dans D_C.

5.2.2 Forme particulière

Si le volume de contrôle est un tube de courant coiffé par deux sections de base S_1 et S_2 : $\Sigma_C = S_1 \cup S_2 \cup S_L$ où S_L est la surface latérale comme le montre la figure suivante. Ce cas correspond, à titre d'exemple, à l'écoulement en charge dans un tronçon d'une conduite ou à une approximation d'un jet d'eau dans l'air atmosphérique.

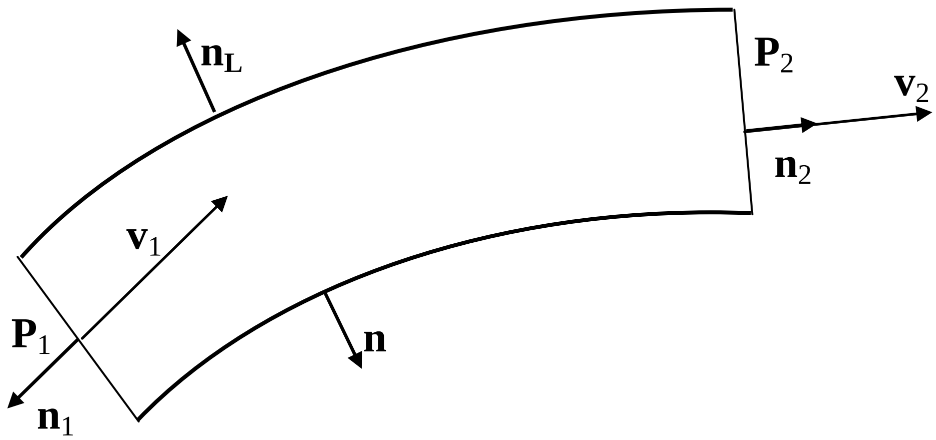

Figure 1 : Ecoulement dans un tronçon de conduite

Le flux de quantité de mouvement à travers S_L est nul et l'équation (5-1) se réduit alors à la forme suivante :

$$\int_{S_1} \rho \mathbf{v_1} (\mathbf{v_1} \cdot \mathbf{n_1}) \, ds \quad + \quad \int_{S_2} \rho \mathbf{v_2} (\mathbf{v_2} \cdot \mathbf{n_2}) \, ds = \mathbf{F}_{ext} \tag{5-2}$$

La conservation de la masse se traduit dans ce cas par une conservation du débit qui s'écrit :

$$Q \;=\; -\int_{S_1} \mathbf{v_1} \cdot \mathbf{n_1} \, ds \;=\; \int_{S_2} \mathbf{v_2} \cdot \mathbf{n_2} \, ds \tag{5-3}$$

Si on néglige la variation de la vitesse sur les sections. D'après (5-1), (5-2) et (5-3), l'effort de contact exercé par la paroi sur l'écoulement s'exprime comme suit :

$$F^{contact}_{paroi \rightarrow écoulement} \;=\; -\int_{\Sigma_C} p\mathbf{n} ds \;+\; \int_{\Sigma_C} \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{n} ds \;=\; \int_{D_C} \rho \mathbf{g} d\tau \;+\; \rho Q \, (\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1) \tag{5-4}$$

Si on néglige la variation de la pression sur une section de l'écoulement, la contrainte de pression qui figure au second membre de (5-4) se réduit à :

$$F^{pression}_{paroi \rightarrow écoulement} \;=\; -\int_{\Sigma_C} p\mathbf{n} ds \;=\; -(p_1 S_1 \mathbf{n}_1 \;+\; p_2 S_2 \mathbf{n}_2) \tag{5-5}$$

On déduit alors une expression aisée de la force de frottement des parois exercée sur l'écoulement qui s'écrit :

$$F^{cisaillement}_{paroi \rightarrow écoulement} \;=\; \int_{S_L} \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{n} ds \;=\; \rho Q \, (\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1) \;+\; (p_1 S_1 \mathbf{n}_1 \;+\; p_2 S_2 \mathbf{n}_2) \tag{5-6}$$

5.3 Conservation de l'énergie : Théorème de Bernoulli

5.3.1 Forme générale : cas d'un fluide réelle

On considère l'écoulement d'un fluide incompressible dans le champ de pesanteur terrestre. Le bilan local de l'énergie cinétique établi au chapitre 3 (équation (3-49)) s'écrit :

$$\frac{\partial}{\partial t}(e_C) + \mathbf{v}\cdot(\nabla e_C) = \rho\mathbf{g}\cdot\mathbf{v} + \nabla\cdot(\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{v}) - \boldsymbol{\tau}:(\nabla\mathbf{v}) \tag{5-7}$$

Soit un système d'axes $(O\,;\mathbf{e}_x\,;\mathbf{e}_y\,;\mathbf{e}_z)$ choisi tel que l'axe (O ; $\mathbf{e}_z$) est dirigé selon la verticale ascendante. Le champ de pesanteur $\rho\mathbf{g}$ dérive du potentiel scalaire de gravité :

$$\psi = \rho g z \tag{5-8}$$

selon la relation :

$$\rho\mathbf{g} = -\nabla\psi \tag{5-9}$$

En introduisant la décomposition du tenseur des contraintes en contraintes de pression et de cisaillement, la puissance des efforts de contact dans l'équation (5-7) s'écrit :

$$\nabla\cdot(\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{v}) = -\nabla p\cdot\mathbf{v} + \nabla\cdot(\boldsymbol{\tau}\cdot\mathbf{v}) \tag{5-10}$$

L'équation (5-7) s'écrit alors :

$$\frac{\partial}{\partial t}(e_C) + \mathbf{v}\cdot(\nabla e_C) = -(\nabla\psi)\cdot\mathbf{v} - \nabla p\cdot\mathbf{v} + \nabla\cdot(\boldsymbol{\tau}\cdot\mathbf{v}) - \boldsymbol{\tau}:(\nabla\mathbf{v}) \tag{5-11}$$

En passant les deux premiers termes du second membre à gauche on peut écrire :

$$\frac{\partial}{\partial t}(e_C) + \mathbf{v}\cdot\nabla\left[e_C + \psi + p\right] = \nabla\cdot(\boldsymbol{\tau}\cdot\mathbf{v}) - \boldsymbol{\tau}:(\nabla\mathbf{v}) \tag{5-12}$$

Si on introduit la quantité Φ définie par :

$$\Phi = e_C + \psi + p = \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho g z + p \tag{5-13}$$

Φ de dimension $M\,L^{-1}\,T^{-2}$ est homogène à une densité volumique d'énergie. L'équation (5-12) s'écrit par conséquent :

$$\frac{\partial}{\partial t}(e_C) + \mathbf{v}\cdot(\nabla\Phi) \;=\; \nabla\cdot(\boldsymbol{\tau}\cdot\mathbf{v}) \;-\; \boldsymbol{\tau}:(\nabla\mathbf{v}) \qquad (5\text{-}14)$$

C'est *l'équation locale de Bernoulli sous sa forme générale*. On peut interpréter cette équation à l'échelle d'un volume élémentaire de la manière suivante :

> *« La variation locale au cours du temps de l'énergie cinétique ajoutée au flux advectif de l'énergie totale Φ est égale à la somme de la puissance des efforts de contact de cisaillement s'exerçant à la surface de ce volume et la puissance des efforts intérieurs »*

Le premier terme du second membre qui représente la puissance des efforts de contact de cisaillement peut être interprété, à l'échelle de l'écoulement, comme un terme d'échange d'énergie avec le milieu extérieur. Il est positif en cas d'apport d'énergie depuis le milieu extérieur : c'est le rôle d'une pompe dans un écoulement. Il est négatif en cas de transfert d'énergie depuis l'écoulement vers le milieu extérieur : c'est le cas de présence d'une turbine.

Le second terme du second membre qui représente la puissance des efforts intérieurs est un terme constamment négatif. C'est un terme qui représente à l'échelle de l'écoulement la perte d'énergie par les effets de frottement. Ce frottement se produit entre les particules fluides à l'intérieur du milieu fluide ou en contact avec la paroi. L'effet de ce terme est très présent dans les applications pratiques.

5.3.2 Forme particulière : cas d'un fluide parfait incompressible

Une relation importante appelée « le théorème de Bernoulli » est obtenue si on considère les hypothèses suivantes :

- L'écoulement est permanent : $\frac{\partial}{\partial t} \equiv 0$
- Le fluide est parfait : $\boldsymbol{\tau} = 0$

L'équation (5-14) du théorème de Bernoulli sous sa forme générale se réduit dans à :

$$\mathbf{v}\cdot(\nabla\Phi) \;=\; 0 \qquad (5\text{-}15)$$

ce qui veut dire que la quantité Φ reste constante le long d'une ligne de courant :

$$\Phi = \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho g z + p = Cte_{\text{(ligne de courant)}} \tag{5-16}$$

ceci traduit la conservation de l'énergie totale le long d'une ligne de courant en écoulement de fluide parfait.

A fin d'exprimer cette conservation d'énergie en termes de grandeurs homogènes à des distances, on divise Φ par la quantité ρg. On obtient ainsi une nouvelle grandeur H homogène à une distance et qui se conserve le long d'une ligne de courant :

$$H = \frac{v^2}{2g} + \frac{p}{\rho g} + z \tag{5-17}$$

H s'appelle « *La charge hydraulique* ». Elle est définie localement.